

Python最終発表

鈴木先生の線形代数
の問題Pythonで解い
てみた！

坂田燎平



全部で6題の問題を
Pythonを使用して解
きました！

2 次の行列の積を求めよ。

よ、 $4\sqrt{23+x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = x-1$ から、 $x = -2, -\frac{19}{11}$ 。

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

```
In [31]: A=np.array([[2, -2], [1,0],[2 , 1]])
```

```
In [32]: B=np.array([[ -1, 2, 1], [2, 1, -3]])
```

```
In [33]: result=np.dot(A, B)
```

```
In [34]: result
```

```
Out[34]:
```

```
array([[ -6,  2,  8],  
       [-1,  2,  1],  
       [ 0,  5, -1]])
```

```
In [35]: C=np.array([[1],[-2], [-1], [3]])
```

```
In [36]: D=np.array([[1, -2, 2, 1], [3, 2, 1, -1]])
```

```
In [37]: result=np.dot(D, C)
```

```
In [38]: result
```

```
Out[38]:
```

```
array([[ 6],  
       [-5]])
```

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ の階数 $\text{rank} A$ を求めよ。

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad \text{rank} A = \boxed{3} \end{aligned}$$

4 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$ が正則行列となる a, b, c, d の必要十分条件を求めよ。

この行列を A とおくと、

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A が正則行列となる必要十分条件は行列式 $A \neq 0$ より、

$$\begin{aligned} \det A &= (b-a)(c-a)(d-a)(d^2-a^2) + (b^2-a^2)(c^2-a^2)(d-a) + (c-a)(d^3-a^3)(b^2-a^2) \\ &\quad - (c-a)(b^3-a^3)(d^2-a^2) - (d-a)(c^3-a^3)(b^2-a^2) - (b-a)(d^3-a^3)(c^2-a^2) \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \left[(d^2+da+a^2) \{ (c+a)-(b+a) \} + (c^2+ca+a^2) \{ (b+a)-(d+a) \} \right. \\ &\quad \left. + (b^2+ba+a^2) \{ (d+a)-(c+a) \} \right] \\ &= (b-a)(c-a)(d-a) \{ (d^2+da+a^2)(c-b) + (c^2+ca+a^2)(b-d) + (b^2+ba+a^2)(d-c) \} \end{aligned}$$

$$\text{よって } b-a \neq 0 \wedge c-a \neq 0 \wedge d-a \neq 0 \wedge c-b \neq 0 \wedge b-d \neq 0 \wedge d-c \neq 0$$

または

$$a \neq b \neq c \neq d \text{ のとき、}$$

行列式 $A \neq 0$ を満たす

$$a \neq b \neq c \neq d$$

5 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

よ、逆行列は、 $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

sympyというパッケージを使用してみました。
numpyより逆行列がわかりやすいです。

```
In [45]: import sympy as sp
```

```
...: [0, 1, -2, 1],  
...: [-1, 0, 1, -1]  
...: ])
```

```
In [47]: A.inv()
```

```
Out[47]:
```

```
Matrix([  
[-2, 3, 2, -2],  
[-1, 2, 2, 0],  
[ 1, -1, -1, 1],  
[ 3, -4, -3, 2]])
```


$$A_{22} = 3, \quad \tilde{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (-4 + 4) = -2.$$

$$A_{32} = 0$$

$$A_{42} = \frac{3}{2}, \quad \tilde{A}_{42} = (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 - (-4 + 2) = -2.$$

$$|A| = -18$$

$$\therefore |A| = 2(0 + 3 \times (-2)) + 0 + \frac{3}{2} \times (-2) = -18.$$

9 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の余因子行列 $\tilde{A}$ を求め、それを用いて A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

$$\text{行列 } A \text{ より, } \left(\begin{array}{c} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \textcircled{D}$$

よって $\textcircled{D}$ を転置して,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また,

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \frac{\tilde{A}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

```

In [51]: import numpy as np
...:
...: # 行列 A を定義
...: A = np.array([
...:     [1, 1, 1],
...:     [2, 2, 1],
...:     [3, 2, 1]
...: ])
...:
...: # 余因子行列を計算する関数
...: def cofactor_matrix(matrix):
...:     n = matrix.shape[0] # 行列のサイズ (正方行列を仮定)
...:     cofactors = np.zeros_like(matrix, dtype=float) # 余因子行列
...:     の初期化
...:
...:     for i in range(n):
...:         for j in range(n):
...:             # 小行列を取得
...:             minor = np.delete(np.delete(matrix, i, axis=0), j, ax
...: is=1)
...:             # 余因子を計算
...:             cofactors[i, j] = ((-1) ** (i + j)) * np.linalg.det(m
...: inor)
...:
...:     return cofactors
...:
...: # 余因子行列を計算
...: A_cofactor = cofactor_matrix(A)
...:
...: # 結果を表示
...: print("行列 A の余因子行列:")
...: print(A_cofactor)
...:

```

行列 A の余因子行列:

```

[[ 0.  1. -2.]
 [ 1. -2.  1.]
 [-1.  1.  0.]]

```

```

In [50]: import sympy as sp
...:
...: # 行列 A を定義
...: A = sp.Matrix([
...:     [1, 1, 1],
...:     [2, 2, 1],
...:     [3, 2, 1]
...: ])
...:
...: # 逆行列を計算
...: A_inv = A.inv()
...: print("行列 A の逆行列:")
...: sp.pprint(A_inv)
...:

```

行列 A の逆行列:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



手で計算するより、
Pythonを使用すれば、簡
単かつ楽に問題を解くこと
ができる！

Pythonでは記号を扱うの
が難しい。